Raisonnement par récurrence et combinatoire

Objectifs :

- Savoir raisonner par récurrence pour établir une propriété
- Dans le cadre d'un problème de dénombrement, savoir utiliser une représentation adaptée (ensembles, arbres, tableaux, diagrammes...) et reconnaître les objets à dénombrer.
- Savoir effectuer des dénombrements simples dans des situations issues de divers domaines scientifiques (informatique, génétique, théorie des jeux, probabilités, etc...)

Aperçu historique :

Giuseppe Peano *(1858-1932), analyste et logicien italien, établit la formulation actuelle du raisonnement par récurrence lors de sa construction axiomatique de l'ensemble* $\mathbb{N}$.
Les axiomes de Peano sont au nombre de cinq :

- *Zéro est un entier naturel*
- *Tout entier naturel a un unique successeur*
- *Aucun entier naturel n'a zéro pour successeur*
- *Deux entiers naturels ayant le même successeur sont égaux*
- *Si un ensemble d'entiers naturels contient zéro , et contient le successeur de chacun de ses éléments, alors cet ensemble est égal à* $\mathbb{N}$

Le cinquième axiome correspond au raisonnement par récurrence.

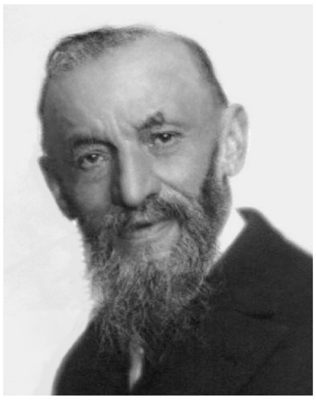


Figure 1.1 – Peano

Les problèmes généraux « d'Analyse combinatoire » ne sont abordés que lors des derniers siècles de l'Antiquité classique. La formule $\binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{2}$ *apparaît au 3ème siècle de notre ère. Le mathématicien hindou* Bhaskara *(1114 - 1185) connaît lui la formule générale pour* $\binom{n}{p}$. *Une étude plus approfondie est effectuée par* Gersonide *(1288 - 1344). C'est lui qui obtient la formule de récurrence permettant de calculer le nombre d'arrangements* A_n^p *et le nombre de permutations de n éléments. Il propose des règles équivalentes aux relations* $\binom{n}{p} = \frac{A_n^p}{p!}$ *et* $\binom{n}{p} = \binom{n}{n-p}$
Cependant ce manuscrit est ignoré de ses contemporains et ses résultats ne sont retrouvés que peu à peu aux siècles suivants. Le mathématicien italien Gerolamo Cardano *(1501-1576) démontre que le nombre de parties non vides d'un ensemble de n éléments est* $2^n - 1$.

Figure 1.2 – Cardano

Par la suite, les français Blaise Pascal *(1623-1662) et* Pierre de Fermat *(1601-1665) fondent le calcul des probabilités et retrouvent parallèlement l'expression :* $\binom{n}{p} = \frac{n!}{p!(n-p)!}$
La formule du binôme.
La relation entre ces nombres et la formule du binôme est observée pour la première fois par Blaise Pascal *(1623-1662) mais il semble avéré que celle-ci soit déjà connue des arabes au 13ème siècle et des chinois au 14ème siècle. Elle est par ailleurs retrouvée en Occident au début du 16ème siècle avec la méthode de calcul par récurrence dite du "triangle de Pascal" ou "triangle arithmétique".*

Figure 1.3 – Fermat

1. Axiome de récurrence

En mathématiques, on est parfois amené à démontrer une propriété dans laquelle le résultat dépend d'un entier n.
On note souvent P_n une telle propriété.
La plupart du temps, on peut facilement vérifier qu'une telle propriété est vraie pour $n = 0$, pour $n = 1$, etc... mais de telles vérifications *ne prouvent pas* que cette propriété est vraie pour tout n.
Proverbe du jour : "Un exemple ne prouve rien".
Si l'on ne trouve pas de démonstration directe, un raisonnement par récurrence peut permettre de démontrer que la propriété P_n est vraie pour tout n.

Propriété 1.1 Soit P_n une propriété dépendante de n entier.

1. Initialisation : **On vérifie** que P_{n_0} est vraie (où $n_0 \in \mathbb{N}$ est le plus petit possible)
2. Hérédité : **On suppose** que P_n est vraie (c'est l'*hypothèse de récurrence*), avec $n > n_0$.
   On peut écrire H.R. : P_n est vraie.
   Ne surtout pas poser comme ~~H.R. : $\forall n \in \mathbb{N}$, P_n est vraie.~~
   A partir de l'hypothèse de récurrence, **on essaie de démontrer** que P_{n+1} est vraie.
   On va donc utiliser P_n pour montrer que P_{n+1} est vraie.
3. **On peut conclure** : $\forall n \in \mathbb{N}$, P_n est vraie.

Exemple 1.1 Montrons par récurrence que pour tout entier naturel non nul n, la somme des n premiers entiers est égale à $\frac{n(n+1)}{2}$. Il s'agit de la somme des termes d'une suite arithmétique de raison 1.
On veut donc démontrer que $P_n : S_n = 1 + 2 + 3 + ... + n = \frac{n(n+1)}{2}$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

1. Initialisation : Vérifions que P_1 est vraie.
   $S_1 = 1$; par ailleurs, $\frac{1\times(1+1)}{2} = \frac{2}{2} = 1$, ces deux nombres sont égaux, donc P_1 est vraie.
2. Hérédité : Pour un certain $n > 1$, je suppose P_n vraie, et je veux démontrer P_{n+1} vraie (en me servant de H.R. : P_n vraie).

$$\begin{aligned}
S_{n+1} &= 1 + 2 + 3 + ... + (n+1) && (1.1)\\
&= S_n + (n+1) && (1.2)\\
&= \frac{n(n+1)}{2} + (n+1) \qquad \text{(utilisation de H.R.)} && (1.3)\\
&= \frac{n(n+1) + 2(n+1)}{2} && (1.4)\\
&= \frac{(n+1)(n+2)}{2} && (1.5)\\
&= \frac{(n+1)[(n+1)+1]}{2} && (1.6)
\end{aligned}$$

3. Je peux conclure que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, P_n est vraie.

2. Ensembles finis

Soit E un ensemble fini. Le nombre n de ses éléments est appelé le ***cardinal*** de E ; on note $cardE = n$ ou $\#E = n$.
L'ensemble vide $\emptyset$ est fini, et on a $card\emptyset = 0$.
On dit qu'un ensemble est infini s'il n'est pas fini.

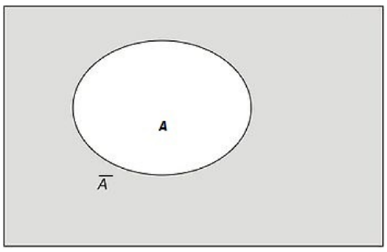
A. Parties d'un ensemble fini

Soit E un ensemble fini et non vide.

a. Complémentaire

Soit A une partie de E. Sur le schéma ci-dessous, l'ensemble E est représenté par le rectangle, et le ***sous-ensemble*** A par un ovale.
Tout élément de A appartient à E ; on dit que A ***est inclus dans*** E et on note $A \subset E$.
Alors A est un ensemble fini, et l'on a $cardA \leqslant cardE$.

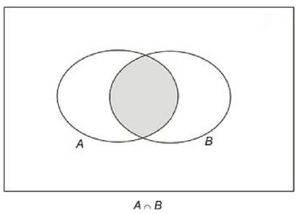
Le complémentaire de A dans E est l'ensemble des éléments de E qui n'appartiennent pas à A.
On le note $\complement_E A$ ou encore $\overline{A}$.
$\overline{A}$ est un ensemble fini, et l'on a : $card\overline{A} = cardE - cardA$



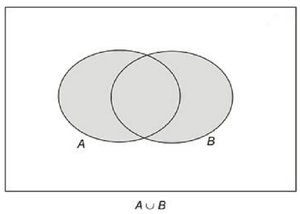
b. Intersection, union.

Soient A et B deux parties de l'ensemble E. Sur les schémas ci-dessous, l'ensemble E est représenté par le rectangle, et les sous-ensembles A et B par des ovales.

- ***L'intersection*** des ensembles A et B est l'ensemble des éléments de E qui appartiennent à la fois à A **et** à B ; on le note $A \cap B$ et on lit « A inter B ».
- ***La réunion ou l'union*** des ensembles A et B est l'ensemble des éléments de E qui appartiennent à l'un au moins des ensembles A **ou** B ; on le note $A \cup B$ et on lit « A union B ».



Intersection



Union

Propriété 1.2 $A \cap B$ et $A \cup B$ sont des ensembles finis, et l'on a :

$$card(A \cup B) = cardA + cardB - card(A \cap B)$$

.

Propriété 1.3 Principe additif :
Dans le cas particulier où $A \cap B = \emptyset$, on dit que les ensembles A et B sont **disjoints** [a], et *seulement dans ce cas-là*, et l'égalité précédente devient : $card(A \cup B) = cardA + cardB$.

a. c'est-à-dire d'intersection vide

Définition 1.1 Soient $A_1, A_2, ...A_k$ k parties *non vides* de E, deux à deux *disjointes*. Si $A_1, A_2, ...A_k$ ont pour *réunion* l'ensemble E, alors on dit qu'elles forment une ***partition*** de E.

Dans ce cas, comme les parties sont disjointes, le principe additif ci-dessus s'applique.

B. Produit cartésien

Définition 1.2 Soient E et F deux ensembles non vides. Le produit cartésien de E par F, noté $E \times F$ (E "croix" F), est l'ensemble des couples (x, y) dont le premier terme x appartient à E, et le deuxième terme y appartient à F.

Vous pouvez voir ces couples comme des « couples de coordonnées », dont la première est dans E et la deuxième dans F.

Si par exemple $E = \{x_1; x_2\}$ et $F = \{y_1; y_2; y_3\}$, les éléments de $E \times F$ sont :

	y_1	y_2	y_3
x_1	(x_1, y_1)	(x_1, y_2)	(x_1, y_3)
x_2	(x_2, y_1)	(x_2, y_2)	(x_2, y_3)

Il y a donc $2 \times 3 = 6$ éléments dans $E \times F$.

On montre de la même manière la propriété suivante :

Propriété 1.4 Principe multiplicatif :
Soient E et F deux ensembles finis non vides, leur produit cartésien $E \times F$ est fini,
et l'on a : $cardE \times F = cardE \times cardF$

3. Combinatoire

A. Ensemble des k-uplets (ou k-listes) d'un ensemble fini

a. Définition d'un k-uplet

Soit E un ensemble fini de cardinal n.
D'après ce qui précède, l'ensemble $E \times E$, noté aussi E^2, est l'ensemble des ***couples*** (x_1, x_2) dont les deux termes sont des éléments de E.
On a $card(E^2) = n^2$.

De la même manière, l'ensemble $E \times E \times E$, noté aussi E^3, est l'ensemble des ***triplets*** (x_1, x_2, x_3) dont chacun des trois termes est un élément de E.

On définit de même, pour $k \in \mathbb{N}^*$, l'ensemble E^k des ***k-uplets*** $(x_1, x_2, x_3, ..., x_k)$ dont chacun des trois termes est un élément de E.
Il faut noter que dans un k-uplet :

- L'ordre des éléments compte (comme dans un couple de coordonnées, les points de coordonnées $(2; 5)$ et $(5; 2)$ ne sont pas les mêmes)
- Le même élément peut apparaître plusieurs fois (comme le point de coordonnées $(3; 3)$ existe)

b. Nombre de k-uplets

Propriété 1.5 Soient E un ensemble fini de cardinal n et $k \in \mathbb{N}^*$.

$$card(E^k) = n^k$$

C'est le nombre de ***k-uplets*** que l'on peut former avec des éléments de E.

Démonstration Montrons par récurrence sur $k \in \mathbb{N}^*$ que $card(E^k) = n^k$ (propriété P_k).
Initialisation : Pour $k = 1$, $E^1 = E$, et comme $cardE = n$, P_1 est vraie.
Hérédité : Supposons la propriété vraie pour un certain $k \in \mathbb{N}^*$.
L'ensemble E^{k+1} est l'ensemble des (k+1)-uplets formés à partir d'éléments de E.
Un (k+1)-uplet est de la forme $(\underbrace{x_1, x_2, x_3, ..., x_k}_{k-uplet}, x_{k+1})$.

Ainsi, à partir de chaque k-uplet $(x_1, x_2, x_3, ..., x_k)$, on peut former $cardE = n$ (k+1)-uplets, selon l'élément de E que l'on choisit comme terme x_{k+1}.
Le nombre de (k+1)-uplets que l'on peut former est donc le produit du nombre de k-uplets par le cardinal de E.
Or (H.R.) le nombre de k-uplets est n^k. Donc le nombre de (k+1)-uplets est $n^k \times n = n^{k+1}$.
Autrement dit, P_{k+1} est vraie.
Conclusion : $\forall k \in \mathbb{N}^*$, P_k est vraie.

Exemple 1.2 On lance cinq fois de suite une pièce de monnaie et on note, après chaque lancer, le côté visible. Déterminons le nombre de résultats possibles.
A chaque lancer de la pièce, il y a deux possibilités : coté pile ou côté face.
Désignons par $\{P; F\}$ l'ensemble de ces deux possibilités.
Lors de cinq lancers successifs, un résultat possible est donc un quintuplet (ou une 5-liste) d'éléments de l'ensemble $\{P; F\}$. Le nombre de résultats possibles est donc le cardinal de cet ensemble à la puissance 5, c'est-à-dire 2^5, ou encore 32.

c. Application : nombre de parties d'un ensemble

Exemple 1.3 Soit $E = a, b, c$. Les parties de E sont :
- Parties à 0 élément : $\emptyset$
- Parties à 1 élément : $\{a\}$; $\{b\}$; $\{c\}$
- Parties à 2 éléments : $\{a, b\}$; $\{a, c\}$; $\{b, c\}$
- Parties à 3 éléments : E

On note ***P(E)*** l'ensemble des parties de E.
P(E) est donc un "ensemble d'ensembles". Ici, on a :
$P(E) = \{\emptyset; \{a\}; \{b\}; \{c\}; \{a, b\}; \{a, c\}; \{b, c\}; E\}$
Le nombre de parties de E, ou encore le cardinal de $P(E)$, est : $cardP(E) = 8$

Propriété 1.6 Soit E un ensemble fini de cardinal n. Le nombre de parties de E est $cardP(E) = 2^n$

Démonstration Soit $E = \{x_1, x_2, x_3, ...x_n\}$.
Soit P une partie de E. On associe à P un unique n-uplet de l'ensemble $\{0; 1\}$ de la manière suivante : pour tout entier i entre 1 et n, on note 1 si x_i est dans P, 0 sinon.
Par exemple, à la partie $P = \{x_2; x_5\}$, on associe le n-uplet : $\{\underbrace{0}_{x_1 \notin P}; \underbrace{1}_{x_2 \in P}; \underbrace{0}_{x_3 \notin P}; \underbrace{0}_{x_4 \notin P}; \underbrace{1}_{x_5 \in P}; \underbrace{0}_{x_6 \notin P}; \underbrace{0; ....; 0}_{x_7, x_8 ... x_n \notin P}\}$
On a ainsi associé à chaque P de $P(E)$ un n-uplet de $\{0; 1\}^n$.
On a une ≪ correspondance un à un ≫ entre les éléments de $P(E)$ et les éléments de $\{0; 1\}^n$: chaque P de $P(E)$ a une image unique dans $\{0; 1\}^n$, et chaque n-uplet de $\{0; 1\}^n$ a un antécédent unique P dans $P(E)$.
Une telle ≪ correspondance un à un ≫ s'appelle une ***bijection*** .
Comme on a une ***bijection*** , le nombre d'antécédents est le même que le nombre d'images.
Ainsi, au lieu de compter le nombre d'éléments P dans $P(E)$, on peut compter le nombre de n-uplets dans $\{0; 1\}^n$.
Or d'après ce qui précède, ce nombre de n-uplets est $card(\{0; 1\})^n$, c'est-à-dire 2^n.

B. k-arrangements : les k-uplets d'éléments distincts

Définition 1.3 Soient E un ensemble fini de cardinal n, et $k \in [\![1; n]\!]$.
On appelle ***k-arrangement*** d'éléments de E tout k-uplet (ou k-liste) d'éléments de E **deux à deux distincts**.

Remarque 1.1 Soient x_1, x_2, x_3 trois éléments de E.
- (x_1, x_1, x_2) est un triplet (ou une 3-liste) d'éléments de E, mais ce n'est pas un 3-arrangement d'éléments de E.
- (x_1, x_2, x_3) est un 3-arrangement d'éléments de E ssi x_1, x_2 et x_3 sont deux à deux distincts (il faudra penser à le vérifier).

Exemple 1.4 Considérons une course de chevaux. ≪ Jouer le tiercé dans l'ordre ≫, c'est engager un pari pour indiquer le numéro du cheval qui arrivera en premier, le numéro de celui qui arrivera en second, et le numéro de celui qui arrivera en troisième. C'est donc indiquer un triplet de nombre deux à deux distincts (le même cheval ne peut pas arriver à la fois premier et deuxième, par exemple) : c'est donc un 3-arrangement de l'ensemble des numéros des chevaux qui ont pris le départ.

Propriété 1.7 Soient E un ensemble fini de cardinal n, et $k \in [\![1;n]\!]$.
Le nombre A_n^k des k-arrangements d'éléments de E est $A_n^k = \underbrace{n(n-1)(n-2)...(n-k+1)}_{k \text{ facteurs}}$

Démonstration Soient E un ensemble fini de cardinal n, et $k \in [\![1;n]\!]$.
L'ensemble des k-arrangements de E est un sous-ensemble de l'ensemble fini E^k des k-uplets (ou k-listes) d'éléments de E : c'est donc un ensemble fini.
Notons A_n^k son cardinal, et calculons-le.

- Premier cas : $k = 1$
  Un 1-arrangement est un élément de E. Il y a n éléments dans E. Par conséquent $A_n^1 = n$.
- Deuxième cas : $k = 2$
  Construire un 2-arrangement d'éléments de E, c'est choisir successivement deux éléments dictincts de E.
  Pour le choix du premier terme, il y a n possibilités : on obtient un arbre à n branches.
  Une fois le premier terme choisi, il y a $(n-1)$ possibilités pour le deuxième terme : chacune des n branches de l'arbre commencé se subdivise en $(n-1)$ ramifications.
  Il y a donc $n \times (n-1)$ chemins distincts sur l'arbre ; on a donc $A_n^2 = n(n-1)$.
- Troisième cas : $3 \leqslant k < n$
  Construire un k-arrangement d'éléments de E, c'est choisir successivement k éléments de E deux à deux distincts.
  Pour le choix du premier terme, il y a n possibilités.
  Une fois le premier terme choisi, il y a $n-1$ possibilités pour le deuxième terme.
  Une fois les deux premiers termes choisis, il y a $n-2$ possibilités pour le troisième terme, etc...
  Une fois les $(k-1)$ premiers termes choisis, il y a $n-(k-1)$, c'est-à-dire $n-k+1$ possibilités pour le k^{ieme} et dernier terme.
  Il y a donc (imaginer un arbre de probabilités) $n(n-1)...(n-k+1)$ k-arrangements possibles ; on a : $A_n^k = \underbrace{n(n-1)(n-2)...(n-k+1)}_{k \text{ facteurs}}$
  Cette formule est valable pour tout k tel que : $1 \leqslant k \leqslant n$.

Remarque 1.2 Dans le cas où l'on a $k > n$, on a $A_n^k = 0$ (on ne peut pas créer de liste comportant plus de termes distincts deux à deux que le nombre d'éléments de l'ensemble).

Exemple 1.5 Lors d'une course de 100 mètres disputée par 9 athlètes, il y a $9 \times 8 \times 7 = 504$ podiums possibles : 9 possibilités pour le vainqueur, puis 8 possibilités pour le deuxième et 7 pour le troisième.
Cela correspond bien à $9 \times (9-1) \times (9-2) = 9 \times (9-1) \times (9-3+1)$.

C. Permutations : les n-arrangements d'éléments (distincts) de E

a. Factorielle d'un entier naturel

Définition 1.4 Soit n un entier naturel non nul. On appelle ***factorielle n*** et on note $n!$ le produit de tous les entiers compris entre 1 et n.
$n! = 1 \times 2 \times 3... \times n$
Par convention, $0! = 1$.

Exemple 1.6 $4! = 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 24$

Propriété 1.8 Le nombre de k-arrangements (k-uplets d'éléments distincts) de E est égal à $A_n^k = \frac{n!}{(n-k)!}$

Démonstration
$\frac{n!}{(n-k)!} = \frac{1 \times 2 \times ... \times (n-k) \times (n-k+1) \times ... \times (n-1) \times n}{1 \times 2 \times ... \times (n-k)} = \frac{\cancel{1} \times \cancel{2} \times ... \times \cancel{(n-k)} \times (n-k+1) \times ... \times (n-1) \times n}{\cancel{1} \times \cancel{2} \times ... \times \cancel{(n-k)}} = (n-k+1) \times ... \times (n-1) \times n$
On retrouve la valeur de A_n^k calculée précédemment.

b. Nombre de permutations

Définition 1.5 On appelle ***permutation*** d'un ensemble fini E de cardinal non nul n tout n-arrangement des éléments de E.

Cela revient à lister tous les éléments de E, sans répéter deux fois le même élément, et sans en oublier aucun : on obtient une n-liste d'éléments distincts de E.

Propriété 1.9 Le nombre de permutation de E est $n \times (n-1) \times (n-2) \times ... \times 2 \times 1 = n!$

Démonstration C'est un cas particulier de calcul de A_n^k avec $k = n$.

Exemple 1.7 Le classement des 8 équipes d'un championnat amateur est une permutation de l'ensemble des 8 équipes. Il y a donc $8! = 40320$ classements possibles.

D. Combinaisons

Soit E un ensemble fini de cardinal n. On note $P(E)$ l'ensemble des parties de E.
Soit A une partie de E. On a nécessairement $0 \leqslant cardA \leqslant n$.

Définition 1.6 Soient E un ensemble de cardinal n et $k \in [\![0; n]\!]$.
On appelle ***k-combinaison*** (ou combinaison de k éléments) d'éléments de E toute partie de E de cardinal k.

Remarque 1.3
- Comme il s'agit d'une partie de E, les k éléments d'une k-combinaison sont **distincts**.
- Dans une k-combinaison, contrairement à un k-uplet, **l'ordre des éléments n'a pas d'importance**.

Exemple 1.8 Si $E = \{a; b; c; d\}$, les 2-combinaisons de E sont les parties de E à 2 éléments.
Ce sont $\{a; b\}$; $\{a; c\}$; $\{a; d\}$; $\{b; c\}$; $\{b; d\}$; $\{c; d\}$.
Elles sont au nombre de 6.

a. Nombre de combinaisons : les coefficients binomiaux

Définition 1.7 On note $\binom{n}{k}$ (ou parfois C_n^k) le nombre de combinaisons de k éléments de E.
Ce nombre est appelé ***coefficient binomial*** . [a]

[a] nous verrons pourquoi au paragraphe 1.3.5

Exemple 1.9 D'après l'exemple précédent, $\binom{4}{2} = C_4^2 = 6$

Théorème 1.1 Soient k et n deux entiers naturels tels que :$0 \leqslant k \leqslant n$.
Le nombre $\binom{n}{k}$ de parties de cardinal k d'un ensemble E de cardinal n est :

$$\binom{n}{k} = \frac{A_n^k}{k!} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

Dans le cas où $k > n$, on a $\binom{n}{k} = 0$, car il n'y a pas de parties de cardinal supérieur au cardinal de l'ensemble.

Démonstration Soit k un entier naturel tel que $0 \leqslant k \leqslant n$. Considérons l'ensemble des parties de E de cardinal k. Nous admettrons que cet ensemble est fini.
Calculons son, cardinal (c'est-à-dire la nombre de parties de E de cardinal k), que l'on notera $\binom{n}{k}$.

- Premier cas : $k = 0$
  Il existe une et une seule partie de E de cardinal 0, c'est l'ensemble vide $\emptyset$.
  On a donc $\binom{n}{0} = 1$

- Deuxième cas : $k = n$
  Il existe une et une seule partie de E de cardinal n, c'est l'ensemble E lui-même.
  On a donc $\binom{n}{n} = 1$
- Troisième cas : $0 < k < n$
  Les parties de E qui ne sont ni l'ensemble vide ni E lui-même s'appellent des ***parties propres*** de E.
  Soit A une partie propre de E de cardinal k.
  Notons $a_1, a_2, ..., a_k$ les éléments de A. On a : $A = \{a_1, a_2, ..., a_k\}$.
  D'après ce qui précède, on sait qu'il y a $k!$ permutations de A, c'est-à-dire $k!$ façons d'écrire les éléments de a, en changeant simplement l'ordre dans lequel ils sont écrits.
  Ainsi, la partie A engendre $k!$ arrangements (ou k-listes) : ce sont les $k!$ listes ordonnées de k éléments que l'ont peut écrire à partir des éléments de A.
  Ainsi, si l'on compte le nombre de k-arrangements dans E (le nombre de listes ordonnées à k éléments), chaque partie A de cardinal k aura été comptée $k!$ fois.
  Pour ne compter qu'une seule fois chaque partie, il faudra donc diviser le nombre de k-arrangements par $k!$.
  Ainsi, le nombre de k-combinaison (parties A à k éléments) est le nombre de k-arrangements divisé par $k!$.
  Or le nombre de k-arrangements est A_n^k, donc le nombre de k-combinaisons est
  $\binom{n}{k} = \frac{A_n^k}{k!} = \frac{\frac{n!}{(n-k)!}}{k!} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$
  Avec les conventions $0! = 1$ et $A_n^0 = 1$, cette formule est également valable pour $k = 0$ et $k = n$.

Exemple 1.10 Considérons une course de chevaux. ≪ Jouer le tiercé dans le désordre ≫, c'est engager un pari pour indiquer l'ensemble des numéros des trois chevaux qui seront les trois premiers, sans tenir compte du classement entre ces trois chevaux.
S'il y a 18 chevaux partants, le nombre de "tiercés dans le désordre" possibles est
$\binom{10}{3} = \frac{18!}{3!(18-3)!} \frac{18!}{3! \times 15!} = \frac{18 \times 17 \times 16 \times \cancel{15} \times ... \times \cancel{1}}{3 \times 2 \times 1 \times \cancel{15} \times ... \times \cancel{1}} = \frac{18 \times 17 \times 16}{6} = 816$
Pensez à simplifier avant d'effectuer les calculs.

b. Propriétés des coefficients binomiaux et triangle de Pascal

Propriété 1.10 Symétrie :
Soient k et n deux entiers naturels tels que :$0 \leqslant k \leqslant n$.
Alors $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$

Démonstration
- Interprétation ensembliste :
  Soit E un ensemble de cardinal n. Supposons $0 < k < n$.
  Choisir un sous-ensemble A à k éléments, c'est également choisir le complémentaire de A dans E, qui aura $n - k$ éléments. Il ya une ≪ relation de un à un ≫ (une ***bijection***) entre les ensembles et leurs complémentaires : ainsi, on arrive au même résultat en comptant les ensembles à k éléments, ou en comptant leurs complémentaires à $(n - k)$ éléments, puisque chaque ensemble a un unique complémentaire.
  Ainsi, il y a autant de parties à k éléments que de parties à $n - k$ éléments : $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$
- Démonstration par le calcul :
  Supposons que $0 \leqslant k \leqslant n$. Vérifiez que l'on a bien $0 \leqslant n - l \leqslant n$.
  Calculons alors $\binom{n}{n-k}$.
  $\binom{n}{n-k} = \frac{n!}{(n-k)!(n-(n-k))!} = \frac{n!}{(n-k)!k!} = \binom{n}{k}$.

Propriété 1.11 Soit $n \in \mathbb{N}$.
On a $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n$

Démonstration ROC : Démonstration au programme, à savoir refaire
Soit E un ensemble fini de cardinal n, et soit k tel que $0 \leqslant k \leqslant n$.
Par définition, $\binom{n}{k}$ est le nombre de parties à k éléments de l'ensemble E.
D'après le principe additif vu au 1.3, $\sum\limits_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n$ est égal au nombre total de parties de E (les parties ayant entre 0 et n éléments).
Or d'après 1.6, le nombre de parties de E est 2^n.
Ainsi, $\sum\limits_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n$

Propriété 1.12 Relation (ou formule) de Pascal :
Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $k \in [\![0; n-1]\!]$. On a :

$$\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1}$$

Démonstration ROC : Démonstration au programme, à savoir refaire
Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $k \in [\![0; n-1]\!]$.

- Interprétation ensembliste (méthode combinatoire) :
  $\binom{n+1}{k+1}$ représente le nombre de parties à $k+1$ éléments dans un ensemble à $n+1$ éléments. Soit F un ensemble de cardinal $n+1$. Notons $F = \{x_1, x_2, x_3, ..., x_k, x_{n+1}\}$.
  Si l'on pose $E = \{x_1, x_2, x_3, ..., x_n\}$, alors l'ensemble E possède n éléments, et les deux sous-ensembles E et $E' = \{x_{n+1}\}$ forment une partition (voir 1.1) de F : on pourra donc utiliser le **principe additif** 1.3.
  Pour construire une partie A à $k+1$ éléments de F, on a deux possibilités :
  — Soit A est constituée uniquement d'éléments de E, soient $k+1$ éléments de E.
  — Soit A est constituée de k éléments de E, auquel on adjoint l'unique élément de E', soit x_{n+1}.
  Ainsi, pour dénombrer le nombre de possibilités pour la partie A , il faut ajouter :
  — Le nombre de parties à $k+1$ éléments de E.
  — Le nombre de parties à k éléments de E, car il y a un seul choix pour le $(k+1)$-ième élément : x_{n+1}.
  Ainsi, le nombre de possibilités pour la partie A est $\binom{n}{k+1}$ (nombre de parties à $k+1$ éléments dans E qui en compte n) auquel on ajoute $\binom{n}{k}$ (nombre de parties à k éléments dans E qui en compte n).
  Finalement,
  $$\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1}$$
- Démonstration par le calcul :
  $\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \frac{n!}{(n-k)!k!} + \frac{n!}{(n-(k+1))!(k+1)!} = \frac{n!}{(n-k)!k!} + \frac{n!}{(n-k-1)!(k+1)!}$
  Or $(k+1)! = 1 \times 2 \times ... \times k \times (k+1) = k! \times (k+1)$,
  et de la même manière $(n-k)! = (n-k-1)! \times (n-k)$.
  En réduisant au même dénominateur, il vient :
  $\frac{n!}{(n-k)!k!} + \frac{n!}{(n-k-1)!(k+1)!} = \frac{n! \times (k+1)}{(n-k)!k! \times (k+1)} + \frac{n! \times (n-k)}{(n-k-1)! \times (n-k)(k+1)!} = \frac{n! \times (k+1)}{(n-k)!(k+1)!} + \frac{n! \times (n-k)}{(n-k)!(k+1)!} = \frac{n! \times (k+1) + n! \times (n-k)}{(n-k)!(k+1)!}$
  En factorisant par $n!$ au numérateur, il vient :
  $\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \frac{n! \times (k+1+n-k)}{(n-k)!(k+1)!} = \frac{n!(n+1)}{(n-k)!(k+1)!}$
  Or $n!(n+1) = (n+1)!$, et $(n-k) = (n+1-(k+1))$, donc $(n-k)! = (n+1-(k+1))!$
  Finalement, $\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \frac{(n+1)!}{(n+1-(k+1))!(k+1)!}$, i.e.[1] $\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1}$

Propriété 1.13 Pour calculer les coefficients binomiaux, on peut également s'aider du triangle de Pascal :

k→	0	1	2	3	4	5	6	7
$n=0$	1							
$n=1$	1	1						
$n=2$	1	2	1					
$n=3$	1	3+3		1				
$n=4$	1	4	6	4	1			
$n=5$	1	5	10	10	5	1		
$n=6$	1	6	15	20	15	6	1	
$n=7$	1	7	21	35	35	21	7	1

A l'intersection de la ligne n et de la colonne k, on retrouve la valeur de $\binom{n}{k}$.

N.B. : Ce tableau est connu sous l'appellation ≪ triangle de Pascal ≫ en Occident, bien qu'il fût étudié par d'autres mathématiciens, parfois plusieurs siècles avant lui, en Inde, en Perse, au Maghreb, en Chine (où il est appelé ≪ triangle de Yang Hui ≫), en Allemagne et en Italie.

E. Formule du binôme de Newton

Soient $a, b \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$. Dans les classes précédentes, vous avez démontré les égalités :
$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$, et $(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$.
Si l'on se réfère au triangle de Pascal ci-dessus, on constate que ces égalités peuvent s'écrire :
$(a+b)^2 = \binom{2}{0} a^2 + \binom{2}{1} ab + \binom{2}{2} b^2 = \sum_{k=0}^{2} \binom{2}{k} a^{2-k} b^k$
et $(a+b)^3 = \binom{3}{0} a^3 + \binom{3}{1} a^2 b + \binom{3}{2} ab^2 + \binom{3}{3} b^3 = \sum_{k=0}^{3} \binom{3}{k} a^{3-k} b^k$
D'une manière générale, on a le théorème suivant, qui se démontre par récurrence sur n :

Théorème 1.2 Soient a et b deux nombres réels, et n un entier naturel non nul. On a :

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k = a^n + \binom{n}{1} a^{n-1} b + ... + \binom{n}{n-1} ab^{n-1} + b^n$$

L'égalité ci-dessus est appelée ***formule du binôme de Newton*** , et les coefficients $\binom{n}{k}$ sont également appelés ***coefficients binomiaux*** .